# LOS ORÍGENES DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Septiembre de 2021

# Índice

## 1. Los orígenes del Análisis Funcional

Los orígenes del Análisis Funcional están estrechamente relacionados con la teoría de ecuaciones integrales y los sistemas de infinitas ecuaciones lineales, las ecuaciones diferenciales y el cálculo de variaciones, el desarrollo de los conceptos topológicos, la teoría conjuntista y la evolución del álgebra "moderna". El Análisis Funcional nació en el primer tercio del siglo XX y sus orígenes están en los trabajos de David Hilbert y Ivar Fredholm en ecuaciones integrales y teoría espectral de operadores, los trabajos de Henri Lebesgue, Maurice Fréchet y Frigyes Riesz en teoría de la medida y espacios abstractos, y los trabajos de Eduard Helly, Hans Hahn y Stefan Banach sobre la teoría de dualidad. Todos estos trabajos aparecen entre los años 1900 y 1932, fecha esta última que, con la publicación del libro de Stefan Banach *Théorie des opérations linéaires*, es considerada la fecha de nacimiento del Análisis Funcional como materia de estudio por derecho propio debido a su gran aplicabilidad a multitud de problemas en diversos campos. El siguiente es un breve sumario de fechas importantes en el desarrollo de todas estas ideas:

- 1900 trabajo de Erik Ivar Fredholm sobre ecuaciones integrales.
- 1902 tesis de Henri Lebesgue sobre integración.
- 1906 trabajo de David Hilbert sobre teoría espectral.
- 1906 tesis de Maurice Fréchet cobre espacios métricos.
- 1910 y 1911 trabajos de Frigyes Riesz sobre $C[a,b]$ y $L_p$.
- 1912 y 1921 trabajos de Eduard Helly.
- 1922 Tesis de Stefan Banach sobre espacios normados.
- 1927 trabajo de Hans Hahn y 1929 trabajo de Banach sobre dualidad; 1927 trabajo de Banach y Hugo Steinhaus.
- 1928 libro de Fréchet *Les espaces abstrait*, y 1932 libro de Banach *Théorie des opérations linéaires*.

En los años que van de 1900 a 1932, los matemáticos descubrieron que problemas procedentes de diferentes campos compartían una serie de características comunes que permitían abordarlos en un contexto unificado, aunque para ello era necesario omitir ciertos detalles no esenciales. Naturalmente, esto condujo a un planteamiento cada vez más abstracto de los problemas, a la consideración de espacios de funciones de diversos tipos y, finalmente, al nacimiento de los *espacios abstractos* en

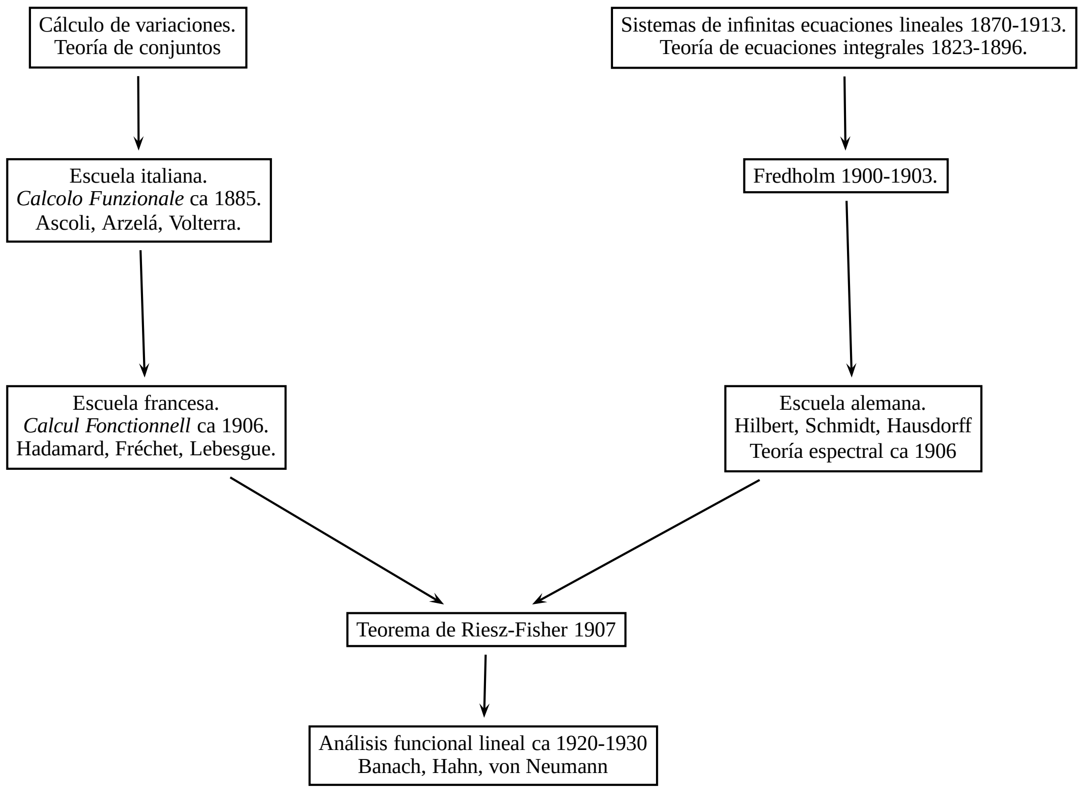


Figura 1. Los orígenes del Análisis Funcional

los que hay una estructura algebraica que satisface ciertos axiomas compatible con una topología, pero en los que no se especifica para nada la naturaleza de sus elementos. Una clara ventaja de este punto de vista abstracto, es que los resultados obtenidos pueden aplicarse en cualquier contexto que satisfaga los axiomas de la teoría.

El desarrollo del Análisis Funcional marca un hito en la tendencia de las matemáticas, dominante desde principios del siglo XX, hacia la generalización y unificación, la axiomatización y la abstracción. Un aspecto central en este camino es la emergencia del concepto fundamental de *espacio funcional*, esto es, un espacio dotado de cierta estructura algebraica y topológica cuyos *puntos* son funciones. Aunque parezca anecdótico, hubo que recorrer un largo camino para representar una función con una sola letra, digamos $f$, en vez de referirse a sus valores $f(x)$. Se necesitó mucho tiempo para dejar de ver una ecuación diferencial o integral solamente como eso, como una simple *ecuación* que hay que resolver, y empezar a considerarla como un *operador* entre espacios de funciones. Lo característico del Análisis Funcional es la consideración de espacios funcionales donde las propiedades individuales de las funciones no son objeto de estudio sino las propiedades estructurales de tales espacios en sus aspectos algebraicos y topológicos.

## 1.1. Sistemas de infinitas ecuaciones lineales

La técnica de solución de ecuaciones diferenciales por el *método de los coeficientes indeterminados*, muy usada en el siglo XVIII, conducía a sistemas de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas. Esta técnica consiste en suponer la existencia de una solución dada como suma de una serie de potencias cuyos coeficientes hay que calcular, sustituir dicha serie en la ecuación diferencial e identificar los coeficientes de las mismas potencias lo que daba lugar a un sistema de infinitas ecuaciones lineales. Aunque los coeficientes a calcular eran infinitos, cada una de las ecuaciones lineales del sistema tenía solamente un número finito de los mismos lo que, si todo iba bien, permitía obtener una *relación recurrente* entre los coeficientes de la serie que permitía resolver el sistema de infinitas ecuaciones por técnicas convencionales para el caso de un número finito de ecuaciones. Puesto que se trataba de una técnica de cálculo, cuyos resultados debían comprobarse en cada caso, no hubo intentos de desarrollar una teoría general de tales sistemas de ecuaciones.

Parece ser que el primer sistema de infinitas ecuaciones lineales no recurrente es considerado por Fourier en su *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Se trata de encontrar una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0, \qquad x>0,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

con las condiciones de contorno $u(0,y)=1$ para $-\pi/2<y<\pi/2$, $u(x,-\pi/2)=u(x,\pi/2)=0$ para $x>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x,y)=0$. Se trata de un modelo matemático de la temperatura estacionaria en el interior de una placa infinita de forma rectangular, cuyos bordes se mantienen a la temperatura prefijada.

Fourier, con su habitual método de separación de variables, pone $u(x,y)=f(x)g(y)$ y calcula $f$ y $g$ sin tener en cuenta las condiciones de contorno. Obtiene así la solución

$$u(x,y)=\mathrm{e}^{-nx}\cos(ny)$$

donde $n$ es cualquier valor real. Para que se cumplan las tres últimas condiciones de contorno $n$ debe ser un entero positivo impar. Puesto que se trata de un problema lineal, Fourier usa el *principio de superposición* y considera la solución dada por la serie:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-(2n-1)x}\cos(2n-1)y$$

donde los coeficientes $c_n$ deben ser determinados de forma que

$$1=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(2n-1)y, \qquad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

Ahora Fourier deriva sucesivamente la serie y sustituye $y=0$ obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ 0 & = & \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2 c_n \\ 0 & = & \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^4 c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \end{array}$$

donde las incógnitas son los coeficientes $c_n$. Para resolver este sistema, Fourier, considera solamente las primeras $k$ ecuaciones y $k$ incógnitas. Un cálculo elemental proporciona las soluciones $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \ldots, c_k^{(k)}$ y, finalmente obtiene:

$$c_n = \lim_{k\to\infty} c_n^{(k)} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Con lo que queda determinada la solución $u(x,y)$ y además:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)y, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Seguidamente, Fourier, comprueba, por cálculos directos, que sus resultados son correctos. Aunque los resultados de Fourier son correctos, sus razonamientos están lejos de serlo, de hecho cuando se sustituye el valor calculado para $c_n$ en el sistema lineal, las series resultantes, a partir de la segunda en adelante, no son convergentes.

Esta forma de proceder de Fourier, sustituyendo un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, por sus primeras $n$ ecuaciones lineales con las incógnitas, $\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$, calcular las soluciones del mismo, $\left\{x_k^{(n)} : 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$, y hacer tender $n$ a infinito, es lo que Riesz ([2]) llama *principio de las reducidas*. Este principio puede considerarse como un paso "de lo finito a lo infinito" y tuvo un papel importante en la teoría de tales sistemas de infinitas ecuaciones. En la teoría de las ecuaciones integrales veremos una variante del mismo que puede considerarse como el "paso de lo discreto a lo continuo".

Que el principio de las reducidas no siempre proporciona soluciones queda claro con el siguiente ejemplo de Helly (1921). El sistema

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots \\ 1 & = & x_2 + x_3 + x_4 + \cdots \\ 1 & = & x_3 + x_4 + \cdots \\ 1 & = & x_4 + \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{array}$$

No tiene solución porque restando a cada ecuación la que le sigue se deduce que debe ser $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo cada sistema reducido tiene como solución $x_n = 1$, $x_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

El principio de las reducidas de Fourier pasó desapercibido, y tiene que pasar casi medio siglo para que a partir de 1870 algunos matemáticos se interesen por los sistemas de infinitas ecuaciones lineales. En el último tercio del siglo XIX se desarrolla una teoría de determinantes infinitos que se aplica para resolver sistemas de infinitas ecuaciones lineales en casos particulares. Los detalles de esta historia se exponen en los dos primeros capítulos de [2]. Para aplicar el método clásico de los determinantes a los sistemas de infinitas ecuaciones lineales era necesario imponer condiciones más o menos restrictivas pero, como afirma Riesz, tales restricciones venían impuestas por el método más que por el problema en sí. En 1913 F. Riesz publicó su memoria *Les systèmes d'équations linéaires a une infinité dínconnues* en la que desarrolla una teoría satisfactoria de tales sistemas sin usar el principio de las reducidas ni determinantes infinitos. Volveremos sobre esto más adelante.

## 1.2. La escuela italiana: Ascolí, Arzelá, Volterra

En 1696 Johann Bernoulli desafió a "los más brillantes matemáticos del mundo" a resolver el problema de la *braquistócrona*, o curva de más rápido descenso. Newton, Leibniz, L'Hôpital y los hermanos Johann y Jakob Bernoulli encontraron que dicha curva es la cicloide. Todos ellos dieron sus soluciones en términos geométricos o mecánicos. Nosotros sabemos que la curva buscada $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, es la que hace mínima la integral:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}}\,\mathrm{d}x$$

Previamente, en 1687, Newton había estudiado el problema del sólido de revolución que experimenta una mínima resistencia cuando se mueve a través de un fluido homogéneo con velocidad constante en la dirección de su eje de revolución. Si es $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, la curva generatriz de dicho sólido, Newton afirma que la solución buscada hace mínima la integral:

$$\int_a^b \frac{y(x)y'(x)^3}{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Otro problema del mismo tipo es el siguiente. Calcular entre todas las curvas $y = y(x)$ satisfaciendo $y(a) = 0$, $y(b) = 1$ la que al girar su gráfica alrededor del eje de abscisas genera una superficie de área mínima. Es decir, queremos hacer mínima la cantidad:

$$\int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Problemas *isoperimétricos* o de cálculo de *geodésicas* o *superficies minimales* también responden al mismo modelo: calcular la curva o superficie que maximiza o minimiza los valores que toma una expresión analítica en la que interviene una curva o superficie desconocida. Fue Euler quien en 1756 llamó a estos problemas *cálculo de variaciones*. Volterra (1860-1940) llamó a estas expresiones analíticas “funciones de línea” o “funciones de funciones”. Hadamard (1865-1963) sugirió otro nombre y llamó a estas funciones “especiales” *funcionales* y se refería al cálculo de variaciones como “el análisis de funcionales”. Parece ser que fue Paul Levy (1886-1971) el primero en usar la expresión “análisis funcional” en 1922.

En el Cálculo de Variaciones se trata de maximizar o minimizar una expresión del tipo

$$J(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\,\mathrm{d}x$$

donde $F$ es una función suficientemente buena y la variable $\varphi$ pertenece a una cierta familia $\mathcal{F}$ de curvas definidas en el intervalo $[a,b]$. Es en este contexto donde aparece primero la idea de *campo funcional*, como conjunto de funciones admisibles, y la de distancia entre funciones. Se suponía, apoyándose por lo general en razones físicas o geométricas, que la existencia del mínimo $\min\{J(\varphi) : \varphi \in \mathcal{F}\}$ o del máximo estaba garantizada cuando la función $F$ estaba acotada. Pero Weierstrass en 1870 probó con un ejemplo que esto no era así.

En 1887 Volterra publicó varios trabajos en los que investigaba clases especiales de funcionales, definidos como aplicaciones continuas $U : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{F}$ es una clase de funciones reales definidas en un intervalo $[a,b]$. Ya que estos parecen ser los primeros trabajos en los que se estudian funcionales en general, se considera que 1887 es el año de nacimiento del análisis funcional.

Es sabido que la compacidad garantiza la existencia de extremos de funciones continuas reales. Esto llevó a otro matemático italiano Cesare Arzelà (1847-1912) a intentar justificar el cálculo de variaciones usando conceptos de compacidad secuencial. Usando el concepto de *equicontinuidad* introducido por Giulio Ascoli (1843- 1896), probó el que seguramente es uno de los primeros resultados notables de análisis funcional conocido como *teorema de Ascoli-Arzelà* publicado en 1883: *Si una sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones reales* definidas en un intervalo $[a,b]$ *está uniformemente acotada y es equicontinua entonces tiene alguna sucesión parcial uniformemente convergente.* Este teorema es una generalización del teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones numéricas acotadas al espacio de dimensión infinita $C[a,b]$.

Puede ser conveniente hacer un poco de historia sobre la convergencia uniforme que es la convergencia en el espacio $C[a,b]$. Ya vimos cómo Cauchy afirmaba que la suma de una serie convergente de funciones continuas es ella misma una función continua, y Abel replicaba que eso no era cierto. El asunto permaneció así por unos años hasta que en 1847 Stokes (1819-1903), en 1848 Seidel (1821-1896) y en 1853 el propio Cauchy, independientemente, demostraron que la convergencia uniforme es suficiente para asegurar la continuidad de la función límite. No obstante, Weierstrass ya había usado el concepto de convergencia uniforme en algunos manuscritos no publicados de 1841. Ninguno de ellos pudo encontrar una condición necesaria. Fue Arzelá quien pudo dar en 1884 una condición necesaria y suficiente para que la función límite puntual, $f$, de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ fuera continua: que la convergencia sea *casi-uniforme*. Es decir que para todo $\varepsilon > 0$, y para todo $p \in \mathbb{N}$ exista un conjunto finito de índices $q_1, q_2, \ldots, q_n$ mayores o iguales que $p$, tales que para cada $t \in [a,b]$:

$$\text{mín}\left\{ |f_{q_i}(t) - f(t)| : 1 \leqslant i \leqslant n \right\} < \varepsilon.$$

El Cálculo de Variaciones está estrechamente relacionado con uno de los problemas más importantes del Análisis del siglo XIX: el *Problema de Dirichlet*. Este problema consiste en encontrar una función armónica $u$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y continua en $\overline{\Omega}$ cuyos valores en la frontera de $\Omega$ vienen dados por una función $f$:

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{x}) &= 0 \qquad && (\mathbf{x} \in \Omega) \\ u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \qquad && (\mathbf{x} \in \mathrm{Fr}(\Omega)) \end{aligned}$$

donde

$$\triangle u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$$

es el operador de Laplace.

Es un problema fundamental en muchas áreas de la Matemática y la Física, y los esfuerzos para resolverlo dieron lugar a nuevas ideas y propiciaron el desarrollo de nuevas teorías. En algunos casos simples el problema de Dirichlet puede resolverse en forma explícita. Por ejemplo, la solución del problema de Dirichlet para un disco en $\mathbb{R}^2$ está dada por la conocida fórmula integral de Poisson. La existencia de solución no siempre está asegurada.

El *principio de Dirichlet* afirma que dicho problema es equivalente a encontrar una función $u$ de clase $C^2$ en $\Omega$ y continua en $\overline{\Omega}$, verificando que $u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathrm{Fr}(\Omega)$, y que es entre todas dichas funciones la que hace mínima la integral

$$E(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Este principio convierte un problema de contorno para la ecuación de Laplace en un problema de tipo variacional. Los intentos de probar la existencia y unicidad de la solución del problema de tipo variacional que se hicieron durante el siglo XIX sólo tuvieron éxito para una clase bastante restringida de dominios y las cosas se complicaron cuando en 1860s Weierstrass demostró, por medio de un ejemplo, que el problema de contorno para la ecuación de Laplace para el caso de una condición de frontera continua podía tener solución y el correspondiente problema variacional no tenerla. Fue Hilbert quien en 1900 logró justificar el principio de Dirichlet bajo la hipótesis de que existiera al menos una función en las condiciones indicadas para el problema variacional con $E(u) < \infty$.

## 1.3. Las ecuaciones integrales y su influencia en el desarrollo del Análisis Funcional

[1]El estudio formal de las ecuaciones integrales suele remontarse a 1823 cuando Niels Abel estudiando un problema mecánico relacionado con la tautocrona resuelve la siguiente ecuación:

$$\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = g(x)$$

donde $g$ es una función conocida que da el tiempo de descenso e $y = f(x)$ es la curva buscada. En la terminología introducida por Hilbert, este es un ejemplo de *ecuación integral de primera especie*, ya que la función incógnita $f$ aparece sólo bajo el signo integral. Una ecuación integral muy parecida fue resuelta de forma independiente por Liouville en 1832 ([4], pg 38). En 1836 Sturm y Liouville transformaron algunas ecuaciones diferenciales en ecuaciones integrales. Así toda solución de la ecuación:

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0$$

donde $q$ es una función real continua en $[a,b]$ y $\lambda > 0$, también es solución de la ecuación integral

$$y(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^x q(t)y(t)\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Esta es una *ecuación integral de segunda especie*, pues la incógnita aparece tanto dentro como fuera de la integral. En general, el problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned} p(x)u''(x) + p'(x)u'(x) + r(x)u(x) + \lambda u(x) &= 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= 0 \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde $p \in C^1([a,b])$ es una función positiva, $r \in C([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, es equivalente a la siguiente ecuación integral

$$u(x) + \int_a^b G(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

[1] En algunos puntos de esta sección sigo muy de cerca el trabajo de F. Bombal [1]. La referencia básica para ecuaciones integrales es el libro [3].

donde $G$ es la *función de Green* del sistema (los detalles pueden consultarse en [**?**]).

En 1837 Liouville introdujo el método de iteraciones para resolver ciertos tipos de ecuaciones integrales. En 1865 A. Beer redujo el problema de Dirichlet para un dominio $\Omega$ en el plano al cálculo de una función $\varphi$ verificando una ecuación integral del tipo:

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$$

donde $f$ es la condición en la frontera y $k$ es una función continua y simétrica. Si consideramos la integral como un operador $K(\varphi)(x) = \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$, podemos escribir la ecuación integral de la forma

$$(I+K)(\varphi) = f$$

Esta ecuación fue resuelta en 1877 por Carl Neumann en términos de una serie

$$\varphi = (I+K)^{-1}(f) = f - K(f) + K^2(f) - K^3(f) + \cdots$$

cuya convergencia pudo probar en ciertos casos.

Fue en 1888 cuando P. du Bois-Reymond sugirió el nombre de *ecuaciones integrales* para designar este tipo de problemas, y propuso desarrollar una teoría general de tales ecuaciones como método alternativo para resolver problemas de ecuaciones diferenciales. J.M. Le Roux (1894) y V. Volterra (1896) fueron los primeros matemáticos que probaron teoremas de existencia y unicidad para una clase general de ecuaciones integrales. Aunque sus métodos eran parecidos, el trabajo de Volterra tuvo más influencia porque incluía una fórmula explícita para la solución y enfatizaba un principio básico: la analogía de las ecuaciones integrales con un sistema de ecuaciones lineales algebraico. En 1896 Volterra desarrolló una teoría general para ecuaciones integrales del tipo

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{1}$$

que ahora se llaman *ecuaciones de Volterra de segunda clase*. Se supone que las funciones que intervienen son continuas y que $k(x,t) = 0$ para $t > x$. Volterra usa un desarrollo en términos de iteradas para expresar la solución por medio de una ecuación integral de segunda especie.

Los trabajos decisivos en ecuaciones integrales fueron escritos en 1900, *Sur une nouvelle méthode pour la resolution du problème de Dirichlet*, y 1903, *Sur une classe déquations fonctionnelles*, por Ivar Fredholm (1866-1927). En dichos trabajos se desarrolla una completa teoría de la ecuación integral de segunda especie

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{2}$$

Observa que cuando $k(x,t) = 0$ para $t > x$, esta ecuación se convierte en la ecuación integral de Volterra (1). Podemos, por tanto, razonar sobre la ecuación integral de Fredholm (2).

El método de las aproximaciones sucesivas, usado por Volterra, consiste en escribir la ecuación (2) en la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

y partiendo de una función inicial, por ejemplo $\varphi_0 = f$, se define por recurrencia

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

que puede escribirse en la forma

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \psi_m(x) \tag{4}$$

donde $\psi_0(x) = f(x)$ y

$$\psi_m(x) = \int_a^b k_m(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \tag{5}$$

donde $k_1(x,y) = k(x,y)$ y

$$k_{m+1}(x,y) = \int_a^b k(x,z)k_m(z,y)\,\mathrm{d}z \qquad (m = 1,2,3,\dots)$$

es la sucesión de los *núcleos iterados*. Podemos escribir (4) en la forma

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_a^b \left[\sum_{m=1}^{n} \lambda^m k_m(x,y)\right] f(y)\,\mathrm{d}y \tag{6}$$

La función dada por

$$H(x,y,\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,y)$$

se llama *núcleo resolvente*, y la función

$$\psi(x) = f(x) - \int_a^b H(x,y,\lambda) f(y)\,\mathrm{d}y$$

es solución de la ecuación integral (3). Por supuesto, para asegurar la convergencia de este proceso hay que hacer hipótesis adecuadas en las que no vamos a entrar.

En general, el método de las aproximaciones sucesivas permite resolver la ecuación (2) para valores pequeños de $|\lambda|$. El camino seguido por Fredholm fue diferente y consistió en definir un "determinante" y resolver la ecuación integral por analogía con un sistema algebraico de ecuaciones lineales.

Dividamos el intervalo $[a,b]$ en $n$ partes de igual longitud $h=(b-a)/n$. Reemplacemos la integral en (2) por una suma de Riemann para obtener una ecuación aproximada

$$\varphi(x)-\lambda h\sum_{j=1}^{n}k(x,t_j)\varphi(t_j)=f(x)\qquad x\in[a,b] \tag{7}$$

Hagamos sucesivamente en esta igualdad $x=t_1,t_2,\dots,t_n$ para obtener los valores aproximados de $\varphi(t_j)$. Obtenemos así el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $\varphi(t_j)$:

$$\varphi_i-\lambda h\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\varphi_j=f_i\qquad i=1,2,\dots,n. \tag{8}$$

donde $f(s_i)=f_i$, $\varphi(s_i)=\varphi_i$, $k(s_i,s_j)=k_{ij}$. La solución de este sistema depende del valor del determinante

$$\triangle(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda hk_{11} & -\lambda hk_{12} & \cdots & -\lambda hk_{1n} \\ -\lambda hk_{21} & 1-\lambda hk_{22} & \cdots & -\lambda hk_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda hk_{n1} & -\lambda hk_{n2} & \cdots & 1-\lambda hk_{nn} \end{vmatrix}$$

que es un polinomio en $\lambda$. Si $\triangle(\lambda)\neq 0$, el sistema (8) tiene solución única. Resolviendo este sistema y sustituyendo los valores obtenidos $\varphi_j=\varphi(t_j)$ en (7) obtenemos una solución aproximada de (2):

$$\varphi(x)\approxeq f(x)+\lambda\frac{Q(x,t_1,t_2,\dots,t_n,\lambda)}{\triangle(\lambda)} \tag{9}$$

donde $Q$ y $\triangle$ son polinomios en $\lambda$.

Cuando $n\to\infty$, las sumas de Riemann en (7) tienden a la integral en (2), por lo que podemos esperar que el lado derecho de (9) converja a una solución exacta de (2). Razonando de forma parecida, Fredholm propuso como solución de (2):

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

donde

$$R(x,t,\lambda)=\frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)},\quad D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A_n\lambda^n,\quad D(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n$$

siendo

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_a^b \cdots \int_a^b k\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \\
B_n(x,t) &= \int_a^b \cdots \int_a^b k\begin{pmatrix} x, t_1, \cdots, t_n \\ t, t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \\
k\begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \\ t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} k(x_1,t_1) & \cdots & k(x_1,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k(x_n,t_1) & \cdots & k(x_n,t_n) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

El cálculo de $A_n$ y $B_n(x,t)$ puede hacerse por medio de relaciones de recurrencia. La función $D(\lambda)$ se llama el *determinante de Fredholm* y $D(x,t,\lambda)$ el *primer menor de Fredholm* de la ecuación (2). La función $R(x,t,\lambda)$ se llama la *resolvente* o el *núcleo resolvente* de la ecuación (2).

La ecuación integral

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(t,x)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{11}$$

se llama *ecuación transpuesta* de la ecuación (2). Se verifica que ambas ecuaciones tienen el mismo determinante.

Bajo hipótesis convenientes, Fredholm justificó los procesos de convergencia, probó que $D(\lambda)$ es una función entera, y obtuvo los siguientes resultados conocidos como la *alternativa de Fredholm*:

- Si $D(\lambda) \neq 0$ entonces la ecuación (2) tiene una única solución que viene dada por (10), y la *ecuación homogénea* asociada

  $$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{12}$$

  solo tiene la solución trivial nula $\varphi = 0$.

- Si $\lambda_0$ es un cero de $D(\lambda)$ de multiplicidad $m$ entonces la ecuación (12) y la correspondiente ecuación homogénea de (11) tienen $m$ soluciones linealmente independientes. En tal caso la ecuación (2) tiene solución si, y sólo si, la función $f$ satisface que

  $$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

  donde las $\varphi_k,\ 1 \leqslant k \leqslant m$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación integral homogénea transpuesta.

Fredholm escribe:

> Considerando la ecuación (2) como una transformación que convierte la función $\varphi$ en una $f$, escribo esta misma ecuación $S_k\varphi(x) = f(x)$ y digo que la transformación $S_k$ pertenece a la función $k(x,y)$.

Es claro que en este trabajo se encuentran ya los principios de una teoría de operadores entre espacios de funciones.

Todavía queda una última sorpresa y es que Fredholm aplicó los resultados obtenidos para probar muy fácilmente que el problema de Dirichlet en el plano tenía solución única para dominios cuya frontera sea una curva que tenga tangente y curvatura finita en todo punto ([3]).

Estos resultados impresionaron a la comunidad matemática y pusieron la teoría de ecuaciones integrales en el centro de interés de los matemáticos contemporáneos. Estos resultados, junto con la teoría de Sturm-Liouville, supusieron el punto de partida de la moderna teoría espectral e influyeron decisivamente en el desarrollo posterior del Análisis Funcional.

## 1.4. David Hilbert y el nacimiento de la teoría espectral

Los trabajos de Fredholm atrajeron la atención de matemáticos de todos los países, y entre ellos Hilbert fue uno de los más entusiastas. Entre los años 1904 y 1906, Hilbert publicó cinco trabajos sobre ecuaciones integrales, y en 1910 un sexto, todos ellos en la revista de la universidad de Göttingen, que fueron recogidos en un libro *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* publicado en 1912. Estos trabajos están entre los que mayor influencia tuvieron en el siglo XX. En ellos formuló los teoremas y definiciones básicos de la teoría espectral (a la que él dio nombre) y de los espacio de Hilbert (que él no nombró, ni siquiera definió).

En el primer trabajo, Hilbert empieza su estudio de la ecuación integral (2). Siguiendo los mismos pasos que Fredholm, reemplaza la integral por las sumas de Riemann, y obtiene de (2) el sistema (8), que resuelve en forma de cociente de determinantes. Tomando límites vuelve a obtener, con demostraciones explícitas y rigurosas, los resultados de Fredholm. Seguidamente Hilbert considera un núcleo continuo y simétrico, es decir, $k(x,y) = k(y,x)$ y advierte la analogía entre la forma bilineal

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}x_iy_j \tag{13}$$

y la integral

$$\int_a^b\int_a^b k(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Esto le lleva a escribir el teorema de los ejes principales para la forma bilineal (13) en una forma apropiada para pasar al límite. En este proceso probó que las raíces del determinante de Fredholm, a las que Hilbert llama *valores propios*[2] son reales y que si se escriben en una sucesión $\{\lambda_n\}$ repitiendo cada una tantas veces como su multiplicidad, entonces para cada $n$ hay una *función propia*[3] $\varphi_n$:

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Estas funciones propias verifican que

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n)$$

Si dichas funciones propias se normalizan por la condición

$$\int_a^b \varphi_n(t)^2\,\mathrm{d}t = 1$$

y si para cada función continua $x$ en $[a,b]$ definimos sus *coeficientes de Fourier* por

$$\langle x|\varphi_n\rangle = \int_a^b \varphi_n(t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

Hilbert probó que

$$\int_a^b\int_a^b k(s,t)x(s)y(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{1}{\lambda_n} \langle x|\varphi_n\rangle \langle y|\varphi_n\rangle \tag{14}$$

donde $\alpha$ es un número finito o bien $\alpha = \infty$ dependiendo de que el número de valores propios distintos sea finito o infinito. En este último caso, la serie converge absolutamente siempre que las funciones $x$ e $y$ verifiquen que

$$\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty, \quad \int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$$

Hilbert interpreta la igualdad (14) como la generalización natural del clásico teorema de reducción de una forma cuadrática a sus ejes principales. A partir de esta igualdad prueba que cualquier función continua $f$ que pueda expresarse en la forma

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)g(t)\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

[2]Estos son los recíprocos de lo que entendemos actualmente por “valores propios”.

[3]Hilbert mantuvo la misma terminología *eigenvalues* “valores propios” o “autovalores”, y *eigenfunction* “función propia” o “autofunción”, usada en el caso finito dimensional.

para alguna función continua $g$, verifica que su desarrollo de Fourier

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f | \varphi_n \rangle \varphi_n(s) \tag{16}$$

es absoluta y uniformemente convergente. La validez de este desarrollo para *toda* función continua $f$ fue probada por uno de los mejores discípulos de Hilbert, E. Schmidt, en su Tesis (1905).

[4] El artículo cuarto es uno de los más apreciados de Hilbert. En él aparece claramente el espíritu actual del Análisis Funcional y la Teoría Espectral. En efecto, en este artículo Hilbert da un salto cualitativo: abandona deliberadamente el marco de las ecuaciones integrales y trata de crear una teoría general de formas bilineales y cuadráticas de infinitas variables:

$$Q(x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q \quad (k_{pq} = k_{qp})$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Hilbert definió el espectro de la forma cuadrática $Q$ distinguiendo el *espectro puntual* (los valores propios) del *espectro continuo*.

La forma cuadrática se llama *completamente continua* si

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q = Q(x)$$

uniformemente para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que donde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Hilbert prueba que toda forma cuadrática completamente continua puede reducirse a sus ejes por una transformación ortogonal:

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2$$

Es evidente, con una perspectiva actual, que estos resultados están prefigurando la teoría de los espacios de Hilbert en su versión canónica de espacio $\ell_2$. Por otro lado, en 1906 aparece también la famosa Tesis Doctoral de M. Fréchet *"Sur quelques points du calcul fonctionnel"*, que tuvo una tremenda influencia, tanto para el desarrollo del Análisis Funcional como para el de la Topología. En su Tesis, Fréchet introduce la noción abstracta de distancia en un conjunto, lo que permite extender las nociones habituales de entornos, límites, continuidad, etc. en conjuntos abstractos. También introdujo Fréchet las nociones de compacidad, completitud y separabilidad, y las estudió en distintos espacios funcionales, $C([a,b])$, $H(D)$, $B([a,b])$, etc. mostrando la importancia de las mismas.

Estas ideas topológicas se difundieron rápidamente. No es extraño, pues, que se intentaran aplicar en el contexto de los importantes trabajos desarrollados por Hilbert. Este programa fue llevado

[4] En todo lo que sigue he copiado párrafos sueltos del antes citado trabajo de F. Bombal ([1]).

a cabo por el mismo Fréchet y uno de los mejores discípulos de Hilbert: Erhard Schmidt quien, en un artículo publicado en 1908, definió el "espacio de dimensión infinita" $\ell_2$ , con las nociones actuales de producto escalar, norma, ortogonalidad, etc. Introdujo también el lenguaje geométrico moderno, probando el teorema de la proyección ortogonal y el proceso de ortogonalización que lleva su nombre. Schmidt introdujo también por primera vez el símbolo que se usa habitualmente para la norma de un vector, él lo hizo para la norma de $\ell_2$:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2}$$

Otros dos jóvenes matemáticos, E. Fischer y F. Riesz, también compartieron esta visión geométrica y topológica del espacio de Hilbert, lo que les llevó a descubrir (independientemente) el llamado "teorema de Fischer-Riesz" (1907), que a su vez establece una inesperada relación de estos temas con otro gran descubrimiento de la época: la Teoría de integración de Lebesgue. El teorema en cuestión establece que, fijado un sistema ortonormal completo de funciones $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, la aplicación $f \to \{\langle f|\varphi_n\rangle\}$ es un isomorfismo hilbertiano entre el espacio $L_2([a,b])$ de las (clases de) funciones de cuadrado integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ (que se define en estos trabajos), y el espacio de Hilbert $\ell_2$. Como importante subproducto, resulta que los resultados de Hilbert se pueden aplicar a cualquier ecuación integral con núcleo $k \in L_2([a,b]^2)$, objetivo perseguido infructuosamente por distintos matemáticos de la época (Hadamard y Hilbert entre ellos). Las consecuencias de este resultado estructural, hicieron ver la importancia del nuevo Análisis, y abrieron el camino hacia la introducción de los espacios $L^p$ y $\ell_p$ por Riesz y, en definitiva, la aparición de la noción general de espacio normado.

### 1.5. Riesz, Hahn, Banach. Espacios vectoriales normados

Probablemente, uno de los mayores responsables del desarrollo del Análisis Funcional, tanto por la variedad de aplicaciones como por la profundidad y originalidad de sus con- tribuciones, es el matemático húngaro Frédéric Riesz (1880-1956). Ya hemos comentado el famoso teorema de Riesz-Fischer, descubierto independientemente por Fischer y Riesz en 1907. En el mismo año, Fréchet y Riesz, independientemente, obtienen la representación de cualquier forma lineal continua $\varphi$ sobre el espacio $L_2([a,b])$ en la forma

$$\varphi(f) = \langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

para alguna (única) $g \in L_2([a,b])$.

Recuerda que para $p \geqslant 1$,

$$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}$$

Riez prueba que si $\varphi$ es una forma lineal continua sobre $\ell_p$, con $p > 1$, existe una única sucesión $z \in \ell_q$ donde $1/p + 1/q = 1$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z(n) \qquad (x \in \ell_p)$$

Estos resultados marcan el inicio de la teoría de la dualidad.

Las contribuciones fundamentales a que nos hemos venido refiriendo, preparan el camino para el desarrollo de una teoría general de espacios normados, funcionales y operadores lineales entre ellos. Esto aconteció en la Tesis de S. Banach *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrals*, defendida en Junio de 1920 y publicada dos años después en *Fundamenta Mathematicae*. En la Introducción, Banach declara su intención de demostrar un serie de resultados válidos en distintos "campos funcionales", para lo cual establece un conjunto de teoremas en un marco muy general que, por especialización, dan lugar a los distintos resultados buscados. Con sus propias palabras:

> "El objetivo de este trabajo es demostrar algunos teoremas que son ciertos para diferentes espacios funcionales (champs fonctionneles). En lugar de probar los resultados para cada espacio funcional particular, he optado por enfoque diferente: considero en general un conjunto de elementos abstractos, para los que postulo una serie de propiedades y demuestro los teoremas para esos conjuntos. Entonces pruebo que los distintos espacios funcionales particulares en los que estoy interesado, satisfacen los axiomas postulados..."

El marco general en cuestión es precisamente lo que hoy conocemos como espacio normado completo. Banach da la definición axiomática de espacio vectorial real, normado y completo y comprueba que numerosos campos funcionales verifican esos axiomas. La Tesis contiene, entre otros, el *principio de acotación uniforme* y el *teorema de las aplicaciones contractivas* en espacios métricos completos, y Banach aplica con gran habilidad estos resultados a distintos espacios funcionales. Veamos un ejemplo de aplicación de éste último.

Convengamos en escribir la ecuación integral (2) en la forma:

$$\varphi = f + \lambda K \varphi \tag{17}$$

donde $K\varphi(x)=\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$. Definamos $T:C([a,b])\to C([a,b])$ por

$$T\varphi = f+\lambda K\varphi \tag{18}$$

Es evidente que resolver la ecuación integral (17) equivale a resolver la ecuación $\varphi=T\varphi$, es decir, a encontrar un punto fijo para $T$. Considerando en $C([a,b])$ la norma usual de la convergencia uniforme, tratemos de aplicar el teorema de las aplicaciones contractivas. Tenemos que

$$\|T\varphi-T\psi\|_\infty \leqslant \max_{a\leqslant y\leqslant b}|\lambda|\int_a^b|k(x,y)||\varphi(y)-\psi(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi-\psi\|_\infty|\lambda|\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b|k(x,y)|\,\mathrm{d}y$$

Por tanto siempre que se cumpla la condición

$$|\lambda|\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b|k(x,y)|\,\mathrm{d}y<1$$

El citado teorema garantiza la existencia y unicidad de un punto fijo para $T$ y, por tanto, la existencia y unicidad de una solución de la ecuación integral (17).

Para terminar, veamos una aplicación del teorema de Hahn-Banach a la resolución de un sistema de infinitas ecuaciones lineales. Consideremos el sistema

$$\sum_{m=1}^{\infty}k_{nm}x_m=c_n \qquad n=1,2,3,\dots \tag{19}$$

Lo primero que debemos hacer es precisar el campo de trabajo. Hay que garantizar que las series convergen. Para ello, supondremos que $x=\{x_n\}$ es un vector genérico de $\ell_p$, con $p>1$, y que los vectores $A_n=\{a_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}}$ están en $\ell_q$ con $1/p+1/q=1$. Estas condiciones garantizan que las series convergen absolutamente. Sea $M$ el subespacio vectorial de $\ell_q$ generado por los $A_n$, esto es, $M=\mathrm{Lin}(\{A_n:n\in\mathbb{N}\})$. Podemos definir una forma lineal $\varphi$ sobre $M$ (supuesto que las ecuaciones son linealmente independientes) por $\varphi(A_n)=c_n$ y extendiendo a $M$ por linealidad. La condición de continuidad para dicha forma lineal viene dada porque exista una constante $\alpha>0$ tal que $|\varphi(z)|\leqslant\alpha\|z\|_q$ para todo $z\in M$. Puesto que todo $z\in M$ puede escribirse de la forma $z=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jA_j$, dicha condición se expresa por

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_jc_j\right|\leqslant\alpha\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_jA_j\right\|_q=\alpha\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_jk_{jm}\right|^q\right)^{1/q} \tag{20}$$

Cuando hay un $\alpha>0$ tal que la condición anterior se cumple cualesquiera sean los números $\lambda_j$, $1\leqslant j\leqslant n$ y cualquiera sea $n\in\mathbb{N}$, el teorema de extensión de Hanh-Banach afirma la existencia de una forma lineal *continua* $f:\ell_q\to\mathbb{R}$ que extiende a $\varphi$ por lo que $f(A_n)=c_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Dicha forma lineal $f$ está definida por un único vector $u\in\ell_p$ de la forma

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}z_mu_m \qquad (\forall z\in\ell_q)$$

Por tanto dicho vector $u$ verifica que

$$f(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{nm} u_m = c_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y, en consecuencia, hemos probado la existencia de la solución del sistema de infinitas ecuaciones lineales. Si exigimos que $\|f\| = \|\varphi\|$ entonces la solución es única. Finalmente, la condición (20) no sólo es suficiente para la existencia de solución sino también necesaria ([2], pg 61).

## Referencias


[1] F. Bombal. *Análisis Funcional: Una perspectiva histórica.* https://eprints.ucm.es/id/eprint/19972/1/bombal66.pdf 10, 17

[2] F. Riesz. *Les systèmes d'équations linéaires a une infinité dínconnues.* Gauthier-Villars, París, 1913. 6, 7, 21

[3] F.G. Tricomi. *Integral equations.* Interscience Publisher Inc., New York, 1957 10, 15

[4] V. Volterra. *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles.* Gauthier-Villars, París, 1913. 10